Лекция 3. Следствия теорем сложения и умножения вероятностей

Формула полной вероятности. Формула Бейеса

Следствием обеих основных теорем - теоремы сложения вероятностей и теоремы умножения вероятностей - является так называемая формула полной вероятности.

Пусть требуется определить вероятность некоторого события *A*, которое может произойти вместе с одним из событий

$$B_1, B_2, B_3, \ldots, B_{n-1}, B_n$$

образующих полную группу несовместных событий. Будем эти события называть гипотезами.

Докажем что, в этом случае

$$P(A) = P(B_1)P_{B_1}(A) + P(B_2)P_{B_2}(A) + \cdots + P(B_n)P_{B_n}(A) = \sum_{i=1}^{n} P(B_i)P_{Bi}(A) \qquad (1.4)$$

Эту формулу называет формулой полной вероятности.

Доказательство. Появление события A означает осуществление одного из несовместных событий B_1A, или B_2A или, ... , или B_nA , то есть

$$A=B_1A+B_2A+\ldots+B_nA$$

Так как $B_1,B_2,\ldots,B_n$ несовместные, то и комбинации $B_1A, B_2A,\ldots, B_nA$ также несовместны; применяя к ним теорему сложения, имеем

$$P(A)=P(B_1A+B_2A+B_nA)=P(B_1A)+P(B_2A)+P(B_nA).$$

Для каждого слагаемого применяя теорему умножения

$$P(B_1A)=P(B_1)P_{B1}(A), \ \ldots \ P(B_nA)=P(B_n)P_{Bn}(A)$$

получим доказываемую формулу.

Пример. Имеются три одинаковые на вид урны; в первой урне - 2 белых и 1 черный; во второй - 3 белых и 1 черный; в третьей - 2 белых и 2 черных. Наугад выбираем одну из урн и вынимается из нее шар. Найти вероятность того, что этот шар белый.

Рассмотрим гипотезы: B_1 - выбор 1-ой урны;

B_2 - выбор 2-ой.урны;

B_3 - выбор 3-ой урны,

и A - появление белого шара. По условию задачи, гипотезы (события) равновозможны, то

$$P(B_1) = P(B_2) = P(B_3) = \frac{1}{3}$$

Условные вероятности события A при этих гипотезах

$$P_{B_1}(A) = \frac{2}{3};\ P_{B_2}(A) = \frac{3}{4};\ P_{B_3}(A) = \frac{1}{2}$$

По формуле полной вероятности

$$P(A) = \frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2} = \frac{2}{3}\cdot\frac{3}{6}$$

Формула Бейеса

Следствием теорема умножения и формулы полной вероятности является так называемая формула Бейеса (теорема гипотез).

Если событие A может произойти только вместе с одним из событий B_1, B_2, B_n , образующих полную группу несовместных событий, а вероятности этих событий $P(B_i)$ и $P_{B_i}(A)$ известны (i=1,2,E,n), то условная вероятность каждой гипотезы B_k при условии, что событие A наступило, равна

$$P_A(B_K) = \frac{P(B_K)P_{B_K}(A)}{\sum_{i=1}^{n} P(B_i)P_{B_i}(A)}$$

По теореме умножения вероятностей:

$$P(AB_K) = P(A)\cdot P_A(B_K) = P(B_K)P_{B_K}(A)$$

$$P_A(B_K) = \frac{P(B_K)P_{B_K}(A)}{P(A)} = \frac{P(B_K)P_{B_K}(A)}{\sum_{i=1}^{n} P(B_i)P_{B_i}(A)}$$

В частном случае, если $P(B_i)=p$ - все гипотезы имеют одинаковую вероятность, то *(1.1)* имеет вид

$$P_A(B_K) = \frac{P_{B_K}(A)}{\sum_{i=1}^{n} P_{B_i}(A)}$$

Пример. Два стрелка независимо один от другого стреляют по одной мишени, делая каждый по одному выстрелу. Вероятность попадания 1-го стрелка 0,8 для второго 0,4. После стрельбы в мишени обнаружена одна пробоина. Найти вероятность того, что эта пробоина принадлежит первому стрелку.

Решение. До опыта возможны следующие гипотезы :

B_1 - ни первый, ни второй стрелок не попадает

B_2 - оба стрелка попадут

B_3 - 1-ый попадает, а 2-ой не попадает

B_4 - 1-ый не попадает, а 2-ой попадает

$P(B_1)=0{,}2*0{,}6=0{,}12$, $P(B_2)=0{,}8*0{,}4=0{,}32$,

$P(B_3)=0{,}8*0{,}6=0{,}48$, $P(B_4)=0{,}2*0{,}4=0{,}08$.

A - обнаружена одна пробоина.

$$P_{B_1}(A) = 0, \quad P_{B_2}(A) = 0, \quad P_{B_3}(A) = 1, \quad P_{B_4}(A) = 1.$$

После опыта гипотезы B_1 н B_2 становятся невозможными, а вероятности B_3 и B_4 будут равны :

$$P_A(B_3) = \frac{P(B_3)P_{B_3}(A)}{\sum_{i=1}^{n} P(B_i)P_{B_i}(A)} = \frac{0{,}48\cdot 1}{0{,}12\cdot 0 + 0{,}32\cdot 0 + 0{,}48\cdot 1 + 0{,}08\cdot 1} = \frac{6}{7}$$

$$P_A(B_4) = \frac{0,08}{0,56} = \frac{1}{7}$$